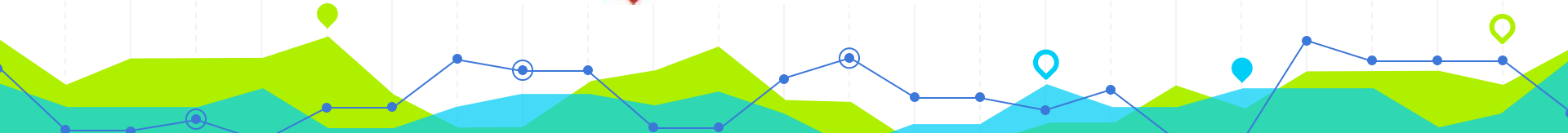




Lisbon School
of Economics
& Management

Universidade de Lisboa



Estatística II

Licenciatura em Gestão do Desporto
2.º Ano/2.º Semestre
2025/2026

Aulas Teórico-Práticas N.ºs 8 e 9 (Semana 5)

Docente: Elisabete Fernandes

E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt



<https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao>



<https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/>

Conteúdos Programáticos

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 1 a 3)

- **Capítulo 1:** Revisões e Distribuições de Amostragem

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 4 a 7)

- **Capítulo 2:** Estimação

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 7 a 9)

- **Capítulo 3:** Testes de Hipóteses

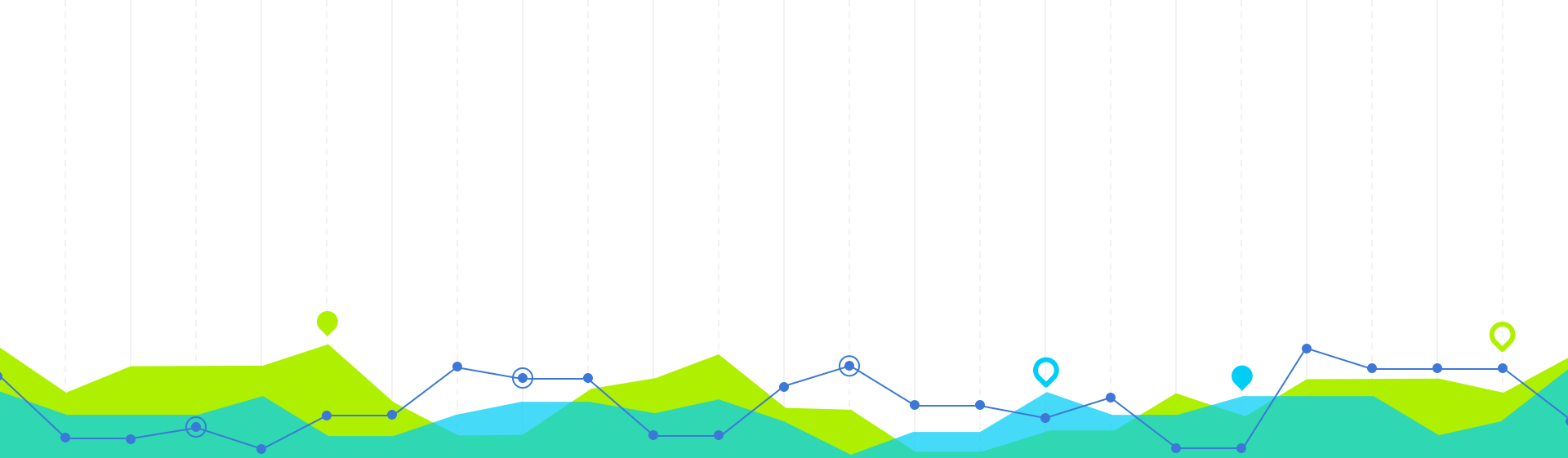
Aulas Teórico-Práticas (Semanas 10 a 13)

- **Capítulo 4:** Modelo de Regressão Linear Múltipla

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

<https://cas.iseg.ulisboa.pt>



Método dos Momentos: Exercícios

(continuação)

1

1. Seja uma população com função probabilidade

$$f(x|\theta) = \theta(1-\theta)^x \quad (x = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

onde $0 < \theta < 1$. Sabe-se que $E(X) = (1-\theta)/\theta$. Recolhida uma amostra casual de dimensão 1000 observou-se $\sum_{i=1}^{1000} x_i = 980$.

- Obtenha uma estimativa para θ pelo método dos momentos.
- Determine o estimador de máxima verosimilhança para θ .
- Calcule, justificando, a estimativa da máxima verosimilhança para a média da população.
- Reparametrize a distribuição em função de $\mu = E(X)$, e utilize a nova função probabilidade para estimar a média da população.
- Mostre que $T = \sum_{i=1}^{1000} X_i$ é estatística suficiente para θ .



Exercício 1 a)

$$f(x|\theta) = \theta(1-\theta)^x \quad (x=0,1,2,3,\dots) \text{ com } (0 < \theta < 1)$$

$$E(X) = \frac{1-\theta}{\theta} = \mu'_1$$

$$\text{Amostra casual: } (X_1, \dots, X_{1000}) \rightarrow \sum_{i=1}^{1000} x_i = 980$$

$$\bar{x} = \frac{980}{1000} = 0.98$$

a) $\theta = ?$

$$1^{\circ} \text{ momento ordinário da população: } \mu'_1 = E(X) = \frac{1-\theta}{\theta}$$

$$1^{\circ} \text{ momento ordinário da amostra: } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$$

Método dos momentos:

$$\mu'_1 = \frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i}{1000} \quad (=) \quad \frac{1-\theta}{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i}{1000} \quad (E)$$

$$(E) \quad \frac{1}{\theta} - 1 = \bar{X} \quad (E) \quad \frac{1}{\theta} = \bar{X} + 1 \quad (E) \quad \theta = \frac{1}{\bar{X} + 1}$$

Exercício 1 a)

Estimador: $\theta = \frac{1}{\bar{X}+1}$

Estimativa: $\tilde{\theta} = \frac{1}{\bar{x}+1} = \frac{1}{0.98+1} \approx 0.5051$

Nota:

Momento ordinário de ordem k (ou momento de ordem k em relação à origem):

- $\mu'_k = E(X^k)$

- Momentos ordinários amostrais de ordem k :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

3. Considere uma variável aleatória X cuja distribuição depende dos parâmetros α e θ , para a qual se tem $E(X) = \alpha \theta$ e $\text{Var}(X) = \alpha \theta^2$. Sabendo que numa amostra casual de 320 observações se obteve $\sum_{i=1}^{320} x_i = 22.2$ e $\sum_{i=1}^{320} x_i^2 = 535.8$, apresente, justificando, uma estimativa para os parâmetros desconhecidos.



Exercício 3

V. A. com $F_X(x|\alpha, \theta)$

$$E(X) = \alpha \theta \quad \text{Var}(X) = \alpha \theta^2$$

Amostra casual: $(X_1, \dots, X_{320}) \rightarrow \sum_{i=1}^{320} x_i = 22.2$

$\searrow \sum_{i=1}^{320} x_i^2 = 535.8$

Vamos usar o método dos momentos. Não é possível usar o método da máxima verosimilhança porque não conhecemos a forma funcional de $f(x|\alpha, \theta)$ e por isso não é possível obter $L(\alpha, \theta)$.

Exercício 3

$$\mu_1' = E(X) = \alpha \theta$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 \quad (\Rightarrow) \quad E(X^2) = \text{Var}(X) + E(X)^2$$

$$(\Rightarrow) \quad \mu_2' = \text{Var}(X) + E(X)^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1' = \frac{\sum_{i=1}^{320} x_i}{320} \\ \mu_2' = \frac{\sum_{i=1}^{320} x_i^2}{320} \end{array} \right. \quad (\Rightarrow) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \theta = \bar{x} \\ \alpha^2 \theta^2 + (\alpha \theta)^2 = \sum_{i=1}^{320} x_i^2 / 320 \end{array} \right. \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\bar{x}}{\theta} \\ \frac{\bar{x}}{\theta} \theta^2 + \left(\frac{\bar{x}}{\theta} \right)^2 \theta^2 = \sum_{i=1}^{320} x_i^2 / 320 \end{array} \right. \quad (\Rightarrow)$$

Exercício 3

$$(\Rightarrow) \left\{ \overline{x} \theta + \overline{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{320} x_i^2}{320} \right. \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \left\{ \overline{x} \theta = \frac{\sum_{i=1}^{320} x_i^2}{320} - \overline{x}^2 \right. \quad (\Rightarrow) \left\{ \theta = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{320} x_i^2}{320} - \overline{x}^2}{\overline{x}} \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{\overline{x}^2}{\Delta^2} \\ \theta &= \frac{\Delta^2}{\overline{x}} \end{aligned} \right.$$

Exercício 3

Conclusão :

$$\tilde{\alpha} = \left(\frac{22.2}{320} \right)^2 / \left[\frac{535.8}{320} - \left(\frac{22.2}{320} \right)^2 \right] = 0.00288$$

$$\tilde{\theta} = \left[\frac{535.8}{320} - \left(\frac{22.2}{320} \right)^2 \right] / \left(\frac{22.2}{320} \right) = 24.06576$$

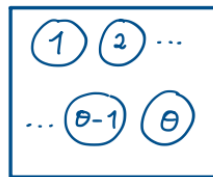
4. Num saco existem θ bolas, numeradas de 1 a θ . Extraiu-se, ao acaso e com reposição, uma amostra de três bolas, tendo-se observado: 13, 5, 9.
- a) Calcule a estimativa do número de bolas existentes no saco, pelo método dos momentos.
 - b) Obtenha a estimativa da máxima verosimilhança para θ .
 - c) Com base nas estimativas obtidas nas alíneas anteriores o que pode dizer sobre os estimadores que as originaram.



Exercício 4 a)

θ bolas

Amostra casual: (X_1, X_2, X_3)



(Amostra com reposição)

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 13 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = 9 \end{cases}$$

$$f_X(x|\theta) = \frac{1}{\theta} \quad (x = 1, 2, \dots, \theta)$$

$X \sim U(1, \theta)$ Distribuição uniforme discreta

$$E(X) = \frac{\theta+1}{2} = \mu'_1$$

$$a) \mu'_1 = \frac{\sum_{i=1}^3 X_i}{3} \quad (=) \quad \frac{\theta+1}{2} = \bar{X} \quad (=) \quad \theta = \underbrace{2\bar{X}-1}_{\text{Estimador}}$$

$$\text{estimativa: } \tilde{\theta} = 2\bar{X} - 1 = 2\left(\frac{13+5+9}{3}\right) - 1 = 17 \text{ bolas}$$

Exercício 4 a)

Com a amostra observada o método dos momentos resulta numa estimativa admissível para θ uma vez que não se observou nenhuma bola com numero superior a 17. No entanto, não é garantido que isto se verifique em todas as amostras. Por exemplo:

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 9) \Rightarrow \hat{\theta} = 2 \frac{(1 + 2 + 9)}{3} - 1 = 7.$$

Com esta amostra o método dos momentos já não resultava numa estimativa admissível para θ uma vez que já se observou a bola nº 9, logo não podem existir apenas 7 bolas.

O método dos momentos é bom para estimar parâmetros referentes a momentos de variáveis aleatórias. Neste exercício, o parâmetro que estamos a estimar é o limite do suporte da variável aleatória (distribuição da população). A qualidade de um estimador não se deve avaliar olhando apenas para estimativas particulares (estejam estas muito próximas ou muito afastadas do verdadeiro valor do parâmetro).

Interessa sim estudar o comportamento do estimador em sucessivas amostras, ou seja, estudar a sua distribuição por amostragem. Neste caso seria melhor usar outro estimador (o EMV).

5. Considere uma amostra casual de dimensão n retirada de uma população com distribuição dada por:

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2\theta}, \quad (-\theta < x < \theta), \text{ para } \theta > 0.$$

Calcule um estimador para θ pelo método dos momentos.



Exercício 5

$(X_1, \dots, X_n)$ amostra casual

$$f_x(x|\theta) = \frac{1}{2\theta} \quad (-\theta < x < \theta), \quad \theta > 0$$

Distribuição uniforme contínua

$$E(X) = \int_{-\theta}^{\theta} x \cdot f_x(x|\theta) dx =$$

$$= \int_{-\theta}^{\theta} x \cdot \frac{1}{2\theta} dx = \frac{1}{2\theta} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\theta}^{\theta} =$$

$$= \frac{1}{2\theta} \left(\frac{\theta^2}{2} - \left(\frac{(-\theta)^2}{2} \right) \right) = \frac{1}{2\theta} \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^2}{2} \right) = 0$$

Como $E(X)$ não depende de θ vamos tentar o 2º momento:

Exercício 5

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\theta}^{\theta} x^2 f_x(x|\theta) dx = \\ &= \int_{-\theta}^{\theta} x^2 \cdot \frac{1}{2\theta} dx = \frac{1}{2\theta} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\theta}^{\theta} = \\ &= \frac{1}{2\theta} \left(\frac{\theta^3}{3} - \left(\frac{(-\theta)^3}{3} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2\theta} \left(\frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^3}{3} \right) = \frac{1}{2\theta} \left(2 \frac{\theta^3}{3} \right) = \frac{\theta^2}{3} \end{aligned}$$

Exercício 5

$$\underline{M.M} : E(X^2) = \sum_{i=1}^n X_i^2 / n \quad (=)$$

$$(=) \quad \frac{\theta}{3}^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 / n \quad (=)$$

$$(=) \quad \theta^2 = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (=) \quad \theta = \pm \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$$

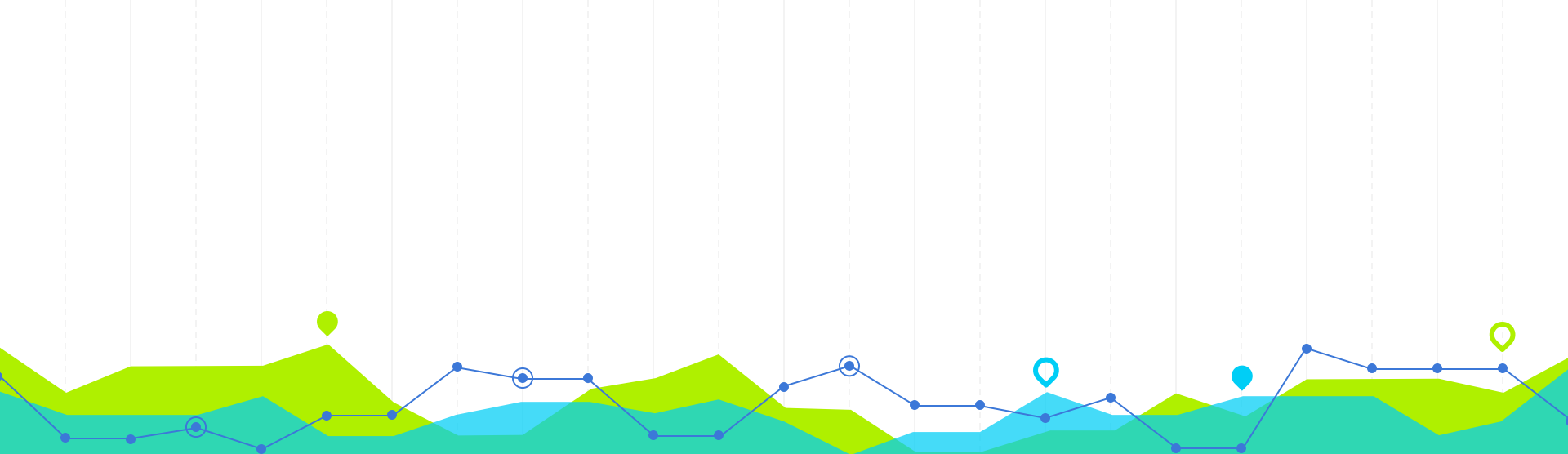
$$\Rightarrow \tilde{\theta} = + \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2} \quad (\text{porque } \theta > 0)$$

Exercício 5

Nota: Caso se reparasse que $X \sim U(-\theta, \theta)$, então:

$$E(X) = \frac{-\theta + \theta}{2} = 0$$

$$E(X^2) = \text{Var}(X) + \underbrace{E(X)}_0^2 = \frac{(\theta - (-\theta))^2}{12} = \frac{(2\theta)^2}{12} = \frac{\theta^2}{3} =$$



Método da Máxima Verosimilhança

Estimadores

2

Métodos de Estimação

Até aqui falámos em **estimadores** e nas propriedades que devem possuir. Interessa ter procedimentos que construam estimadores com boas propriedades.

Vamos então falar dos **principais métodos de estimação paramétrica**.

Dos **métodos de estimação paramétrica** vamos referir:

- o Método dos momentos e
- o **Método da Máxima verosimilhança**

Função de Verosimilhança

Seja X uma v.a. cuja distribuição depende de um **parâmetro** θ , desconhecido, e $(X_1, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória. Seja $(x_1, \dots, x_n)$ a amostra observada.

Definição

Chama-se **verossimilhança da amostra** e representa-se por $\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)$ a

$$f(x_1, \dots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \quad \text{caso contínuo}$$

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n|\theta) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i|\theta) \quad \text{caso discreto}$$

Método da Máxima Verosimilhança

O método da máxima verosimilhança, proposto por Fisher em 1922 e desenvolvido em 1925 consiste em escolher como **estimativa de θ** o valor que **maximiza a verosimilhança** $\mathcal{L}(\theta|x_1, \dots, x_n)$, face a uma amostra observada $(x_1, \dots, x_n)$.

Função de Log-Verosimilhança

Em muitas situações as funções de verosimilhança satisfazem condições que permitem que o valor para o qual a verosimilhança é máxima seja obtido por derivação.

Porém, e como a função logarítmica é monótona, regra geral é mais cómodo trabalhar com a função **log-verosimilhança**,

$$\log \mathcal{L}(\theta|\underline{x})$$

Método da Máxima Verosimilhança (MMV)

Então, no caso de existirem derivadas (e para um único parâmetro θ), o valor do maximizante é obtido de modo que:

$$\frac{d \log \mathcal{L}}{d\theta} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2 \log \mathcal{L}}{d\theta^2} < 0$$

Note-se que
$$\frac{d \log \mathcal{L}}{d\theta} = \sum_{i=1}^n \frac{d \log f(x_i|\theta)}{d\theta}$$

A solução, $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ é a **estimativa de máxima verosimilhança**, que é uma realização da v.a. $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(X_1, \dots, X_n)$.

MMV: Exemplo 1

Considere-se $X \cap P(\lambda)$ e a amostra (0, 0, 2, 5, 3, 1).
Determine uma estimativa de máxima verosimilhança
de λ ?



MMV: Exemplo 1

Exemplo

$X \sim \text{Poi}(\lambda)$

$(0, 0, 2, 5, 3, 1)$

$\text{emv}(\lambda)$ [estimativa de máxima verosimilhança de λ com base nestes dados]

milhange de λ com base nestes dados)

Passo 1 : $\alpha(\lambda; 0, 0, 2, 5, 3, 1) =$

$$= \prod_{i=1}^6 \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!} = \left[\frac{e^{-\lambda} \lambda^0}{0!} \right] \left[\frac{e^{-\lambda} \lambda^0}{0!} \right] \left[\frac{e^{-\lambda} \lambda^2}{2!} \right]$$

$$\left[\frac{e^{-\lambda} \lambda^5}{5!} \right] \left[\frac{e^{-\lambda} \lambda^3}{3!} \right] \left[\frac{e^{-\lambda} \lambda^1}{1!} \right]$$

$$= e^{-6\lambda} \frac{\lambda^4}{2! 5! 3! 1!} \equiv g(\lambda)$$

MMV: Exemplo 1

Passo 2 $g'(\lambda) = \frac{-6e^{-6\lambda} \lambda^{11} + 11e^{-6\lambda} \lambda^{10}}{2! 3! 5! 1!}$

$$= 0 \Leftrightarrow -6\lambda + 11 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{11}{6}$$

$$g''(\lambda) = 36e^{-6\lambda} \dots \Big|_{\lambda=\frac{11}{6}} < 0$$

$$\text{Lnv}(\lambda) = \frac{11}{6}$$

Passo 2^x: Em vez de maximizar $g(\lambda)$
vamos maximizar $\log g(\lambda)$

$$g(\lambda) = \frac{e^{-6\lambda} \lambda^{11}}{0! 2! 5! 3! 1!}$$

$$\ln g(\lambda) = -6\lambda + 11 \log \lambda - \log(\dots)$$

$$[\ln g(\lambda)]' = -6 + \frac{11}{\lambda}$$

$$[\ln g(\lambda)]'' = -\frac{11}{\lambda^2} < 0, \forall \lambda$$

$$\text{Lnv: } -6 + \frac{11}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{11}{6}}$$

1. $y = u^n \Rightarrow y' = nu^{n-1}u'$;
2. $y = c \Rightarrow y' = 0$, onde k é uma constante real;
3. $y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$
4. $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
5. $y = a^u \Rightarrow y' = a^u(\ln a)u'$, ($a > 0, a \neq 1$)
6. $y = e^u \Rightarrow y' = e^u u'$
7. $y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u} \log_a e$
8. $y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{1}{u} u'$
9. $y = u^v \Rightarrow y' = vu^{v-1}u' + u^v(\ln u)v'$
10. $y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$
11. $y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$
12. $y = \tan u \Rightarrow y' = u' \sec^2 u$, desde que $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$;
13. $y = \cot u \Rightarrow y' = -u' \csc^2 u$, desde que $x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$;

MMV: Exemplo 2

Considere-se a v.a. $X \cap \text{Exp}(\mu)$ e a amostra $(1.2, 0.5, 3)$.
Determine uma estimativa de máxima verosimilhança de μ ?



MMV: Exemplo 2

Exemplo 2: $X \sim \text{Exp}(\mu)$ $f_X(x) = \mu e^{-\mu x}$, $x > 0$

amostras: $(1.2; 0.5; 3)$

$$\text{e.m.v.}(\mu) = \hat{\mu} = \frac{3}{1.2 + 0.5 + 3}$$

Como X é v.c. contínua:

$$\begin{aligned} \bullet d(\mu; x_1, x_2, x_3) &= \prod_{i=1}^3 \mu e^{-\mu x_i} = \\ &= \mu^3 e^{-\mu \sum x_i} = \mu^3 e^{-\mu(1.2 + 0.5 + 3)} \end{aligned}$$

$$\bullet \ln g(\mu) = 3 \ln \mu - 4.7 \mu$$

$$[\ln g(\mu)]' = \frac{3}{\mu} - 4.7 = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{4.7}$$

$$[\ln g(\mu)]'' = -\frac{3}{\mu^2} < 0, \forall \mu$$

$$\Rightarrow \text{e.m.v.}(\mu) = \hat{\mu} = \frac{3}{4.7}$$

Propriedade Fundamental dos EMV: Invariância

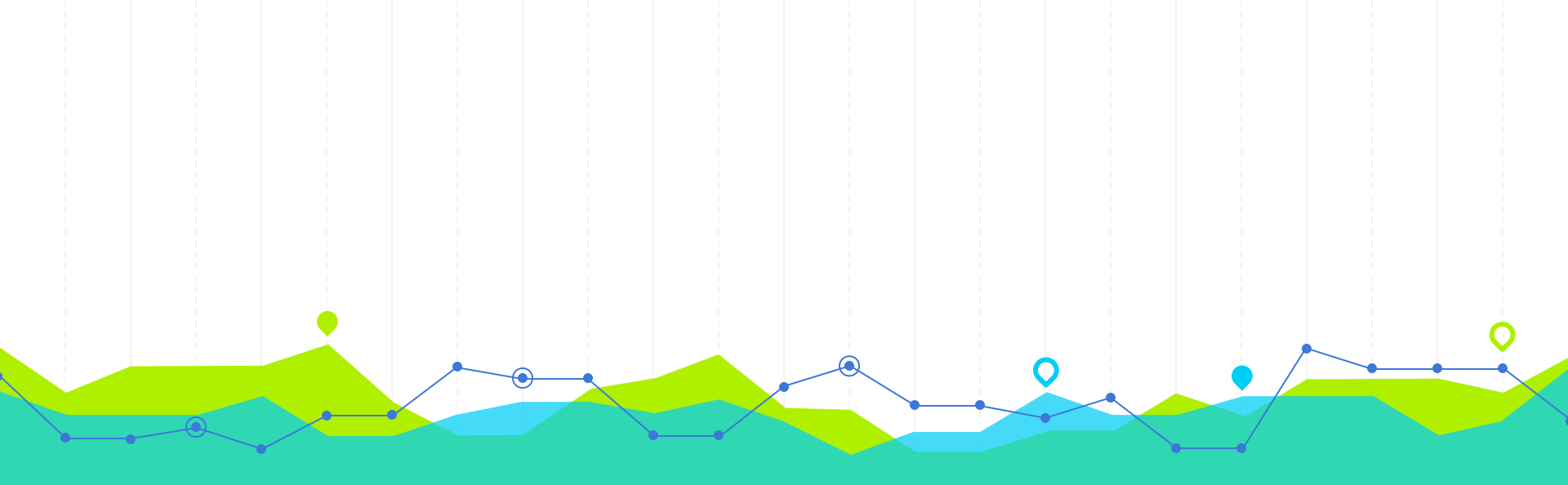
Propriedade fundamental dos EMV: Invariância

$$EMV(h(\theta)) = h(EMV(\theta))$$

Exemplo:

$$EMV(\bar{x}) = \bar{x}$$

$$EMV(\ln \bar{x}) = \ln(EMV(\bar{x})) = \ln \bar{x}$$



Método da Máxima Verosimilhança: Exercícios

Estimadores

3

3. Considere uma população com distribuição de Bernoulli, com parâmetro p , com $0 < p < 1$.
- a) Derive o estimador de máxima verosimilhança para o parâmetro p .
 - b) Foi obtida uma amostra de dimensão $n = 3$, cujos valores observados foram $(1, 1, 0)$.
 - i. Esboce o gráfico da função de verosimilhança e interprete-o.
 - ii. Forneça uma estimativa para p com base no método da máxima verosimilhança.

[ProbabilidadesEstatistica_2019 \(uevora.pt\)](#)



Exercício 2 a): Estimação de Máxima Verosimilhança

a) Função de probabilidade (f. p.):

$$f(x; p) = p^x (1 - p)^{1-x}, \quad x = 0, 1, \text{ com } 0 < p < 1.$$

Função de verosimilhança:

$$\mathcal{L}(p) = \prod_{i=1}^n f(x_i; p) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1 - p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1 - p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}.$$

Logaritmo da função de verosimilhança:

$$\ln(\mathcal{L}(p)) = \sum_{i=1}^n x_i \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^n x_i \right) \ln(1 - p).$$

Exercício 2 a): Estimação de Máxima Verosimilhança

Condição de 1ª ordem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln(\mathcal{L}(p))}{\partial p} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{1}{p}\right) + \left(n - \sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\frac{-1}{1-p}\right) = 0 \Leftrightarrow (1-p) \sum_{i=1}^n x_i - p \left(n - \sum_{i=1}^n x_i\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i - pn = 0 \Leftrightarrow p = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}.\end{aligned}$$

Condição de 2ª ordem:

$$\frac{\partial^2 \ln L(p; x)}{\partial p^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p^2} + \frac{(n - \sum_{i=1}^n x_i)(-1)}{(1-p)^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p^2} - \frac{(n - \sum_{i=1}^n x_i)}{(1-p)^2} < 0,$$

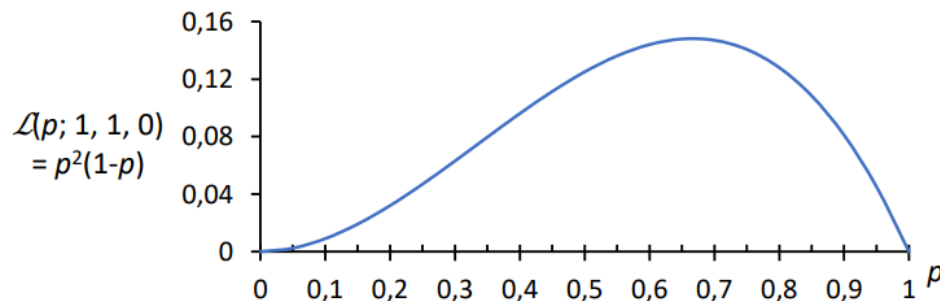
pois $x_i \geq 0, p^2 > 0, n > 0, (1-p)^2 > 0$ e $n \geq \sum_{i=1}^n x_i$ pois $x_i = 0$ ou 1 .

Portanto, o estimador de máxima verosimilhança é:

$$\hat{p} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}.$$

Exercício 2 b) i e ii: Estimação de Máxima Verosimilhança

b) i) Substituindo em $\mathcal{L}(p)$, (x_1, x_2, x_3) pelos valores observados na amostra, $(1, 1, 0)$, obtemos,
$$\mathcal{L}(p) = p^2(1 - p).$$



A função de verosimilhança atinge o seu valor máximo quando o p se situa perto de 0,65, sendo este o valor de p mais provável que deu origem à observação desta amostra.

ii) $\hat{p} = \frac{2}{3} = 0,6667$

2. Seja $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma a. a. de uma distribuição Normal, $X \sim N(\mu; \sigma)$. Estime os parâmetros μ e σ pelo método:

b) Da máxima verosimilhança.

[ProbabilidadesEstatistica_2019 \(uevora.pt\)](http://ProbabilidadesEstatistica_2019(uevora.pt))



Exercício 2: Estimação de Máxima Verosimilhança

b) Função densidade de probabilidade (f. d. p.):

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad \sigma > 0.$$

Função de verosimilhança:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mu, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}. \end{aligned}$$

Logaritmo da função de verosimilhança:

$$\ln(\mathcal{L}(\mu, \sigma^2)) = -\frac{n}{2} (\ln(2) + \ln(\pi) + \ln(\sigma^2)) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

Exercício 2: Estimação de Máxima Verosimilhança

Condições de 1ª ordem:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial \ln L(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = 0 \\ \frac{\partial \ln L(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2\sigma^2} \left(-2 \sum_{i=1}^n x_i + 2n\mu \right) = 0 \\ -\frac{n}{2\sigma^2} + \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \frac{2}{4\sigma^4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i - n\mu = 0 \\ -n\sigma^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \\ \sigma^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \bar{x} \\ \sigma^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \bar{x} \\ \sigma^2 = \left(\frac{n-1}{n} \right) s^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercício 2: Estimação de Máxima Verosimilhança

Condições de 2ª ordem:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \ln L(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu^2} = -\frac{1}{2\sigma^2} 2n < 0 \\ \frac{\partial^2 \ln L(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^4} = \frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^4} - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^6} < 0 \end{cases},$$

pois $n > 0, \sigma^2 > 0, \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^6} > \frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^4}$.

Exercício 2: Estimação de Máxima Verosimilhança

Portanto, os estimadores de máxima verosimilhança obtidos foram:

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} \\ \hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{n-1}{n} S^2 \end{cases}.$$

1. Seja uma população com função probabilidade

$$f(x|\theta) = \theta(1-\theta)^x \quad (x = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

onde $0 < \theta < 1$. Sabe-se que $E(X) = (1-\theta)/\theta$. Recolhida uma amostra casual de dimensão 1000 observou-se $\sum_{i=1}^{1000} x_i = 980$.

- Obtenha uma estimativa para θ pelo método dos momentos.
- Determine o estimador de máxima verosimilhança para θ .
- Calcule, justificando, a estimativa da máxima verosimilhança para a média da população.
- Reparametrize a distribuição em função de $\mu = E(X)$, e utilize a nova função probabilidade para estimar a média da população.
- Mostre que $T = \sum_{i=1}^{1000} X_i$ é estatística suficiente para θ .



Exercício 1 b)

$\theta \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} L(\theta) &= f(x_1, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) = \prod_{i=1}^n \theta (1-\theta)^{x_i} = \\ &= \theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i} \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell(\theta) &= \ln \{L(\theta)\} = \\ &= \ln \left\{ \theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i} \right\} = \\ &= n \ln(\theta) + \sum_{i=1}^n x_i \ln(1-\theta) \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

Nota:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= x_1 + x_2 \\ a \cdot a &= a \\ \prod_{i=1}^n a^{x_i} &= a^{\sum_{i=1}^n x_i} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\theta} \ell(\theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{\theta} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{1-\theta} = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \frac{n}{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{1-\theta} \quad (\Rightarrow) \frac{1-\theta}{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x} \quad (\Rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\theta} = \bar{x} + 1 \quad (\Rightarrow) \quad \hat{\theta} = \frac{1}{1 + \bar{x}}$$

Exercício 1 b)

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\theta^2} l(\hat{\theta}) &= \frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{n}{\theta} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{1-\theta} \right\} \bigg|_{\theta=\hat{\theta}} = -\frac{n}{\theta^2} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{(1-\theta)^2} \bigg|_{\theta=\hat{\theta}} \\ &= -\underbrace{\frac{n}{\hat{\theta}^2}}_{>0} - \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{(1-\hat{\theta})^2}}_{>0} < 0 \quad \text{para } (0 < \hat{\theta} < 1) \\ &\quad \hookrightarrow \text{Valores admissíveis de } \theta \end{aligned}$$

porque $n=1000$ e $\sum_{i=1}^{1000} x_i = 980$

Conclusão $\hat{\theta} = \frac{1}{1+\bar{X}}$ é o estimador da máxima verossimilhança para θ .

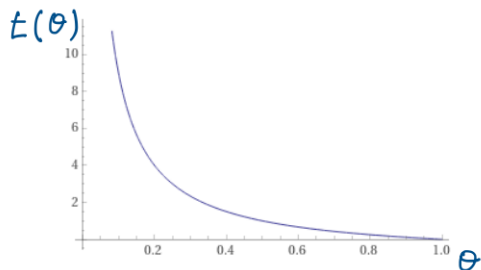
Nota: $\hat{\theta} = \frac{1}{1+\bar{X}}$ é um estimador (variável aleatória)

$\hat{\theta} = \frac{1}{1+\bar{x}}$ é uma estimativa ($\hat{\theta} \in \mathbb{R}$)

Exercício 1 c)

c) $\mu_x = \frac{1-\theta}{\theta} = \frac{1}{\theta} - 1 = t(\theta)$ função de θ

Queremos $\hat{\mu}_x = t(\hat{\theta})$ e temos $\hat{\theta}$



$t(\theta)$ é monotona decrescente
em $0 < \theta < 1$



$t(\theta)$ é função biunívoca de θ
em $0 < \theta < 1$



Pode-se usar a propriedade de
invariância de EMV

$$\hat{\theta} = 0.5051$$

$$\hat{\mu}_x = t(\hat{\theta}) = t(\hat{\theta}) = \frac{1}{\hat{\theta}} - 1 = \frac{1}{0.5051} - 1 = 0.9798$$

Para obter igual às soluções usar $\hat{\theta} = \frac{1}{0.98+1}$ sem arredondar

4. Num saco existem θ bolas, numeradas de 1 a θ . Extraiu-se, ao acaso e com reposição, uma amostra de três bolas, tendo-se observado: 13, 5, 9.
- a) Calcule a estimativa do número de bolas existentes no saco, pelo método dos momentos.
 - b) Obtenha a estimativa da máxima verosimilhança para θ .
 - c) Com base nas estimativas obtidas nas alíneas anteriores o que pode dizer sobre os estimadores que as originaram.



Exercício 4 b)

$$b) L(\theta) = \prod_{i=1}^3 f(x_i | \theta) = \frac{1}{\theta^3} f(x_i | \theta) = \frac{1}{\theta^3} (\theta = x_{(3)}, x_{(3)} + 1, x_{(3)} + 2, \dots)$$

$$\Theta = \{x_{(3)}, x_{(3)} + 1, x_{(3)} + 2, \dots\} \rightarrow \text{espaço-parâmetro discreto}$$

$\rightarrow$ não existe derivada em ordem a θ

Como maximizar $L(\theta)$ em ordem a θ ?

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^3} (\theta = x_{(3)}, x_{(3)} + 1, x_{(3)} + 2, \dots)$$

- $L(\theta)$ é função decrescente de θ
- Vamos escolher o menor valor $\theta \in \Theta$
- $L(\theta)$ é maximizada em $\theta = x_{(3)}$
- $\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \{L(\theta)\} = \underline{x_{(3)}}$ (Máximo da amostra)
 $\rightarrow$ Estimador da M.V.

Exercício 4 b)

Conclusão : A estimativa da máxima verossimilhança para θ é $\hat{\theta} = x_{(3)} = 13$

Comentário: O método da máxima verossimilhança escolhe o maior valor observado como estimativa o numero de bolas no saco. Isto significa que, no contexto desde problema, e independentemente da amostra observada, o método da máxima verossimilhança nunca estima valores não admissíveis para θ . Vimos em a) que tais estimativas absurdas podem acontecer com o método dos momentos.

7. O tempo que um aluno leva a responder a uma pergunta do exame é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ . Numa amostra casual de 40 observações verificou-se um total de 480 minutos.
- a) Obtenha o estimador da máxima verosimilhança para λ .
 - b) Determine a estimativa da máxima verosimilhança para a percentagem de perguntas que são resolvidas em menos de 15 minutos.
 - c) Se um exame tiver oito questões, obtenha uma estimativa para a probabilidade de as resolver todas, sabendo que a duração da prova é 2 horas.



Exercício 7 a)

$X \equiv$ Tempo que o aluno demora a responder a uma pergunta do exame (em minutos)

$$X \sim \text{ex}(\lambda), \lambda > 0 \quad f_x(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x > 0)$$

Amostra casual ($n=40$): $(x_1, \dots, x_{40})$

$$\sum_{i=1}^{40} x_i = 480 \quad \bar{x} = \frac{480}{40} = 12$$

a)

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= f_x(x_1, \dots, x_{40} | \lambda) = \prod_{i=1}^{40} f_x(x_i | \lambda) = \\ &= \prod_{i=1}^{40} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^{40} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{40} x_i} \end{aligned}$$

$$l(\lambda) = \ln[L(\lambda)] = \ln \left(\lambda^{40} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{40} x_i} \right) =$$

Exercício 7 a)

$$= 40 \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{40} x_i$$

$$\frac{d}{d\lambda} \ell(\lambda) = \frac{40}{\lambda} - \sum_{i=1}^{40} x_i = 0 \quad (=)$$

$$(\Rightarrow) \frac{40}{\lambda} = \sum_{i=1}^{40} x_i \quad (\Rightarrow) \hat{\lambda} = \frac{40}{\sum_{i=1}^{40} x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$$

Condição de 2ª ordem:

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} \ell(\hat{\lambda}) = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{40}{\lambda} - \sum_{i=1}^{40} x_i \right) = -\frac{40}{\lambda^2} < 0$$

$\Big|_{\lambda = \frac{1}{\bar{x}}} \quad \Big|_{\lambda = \frac{1}{\bar{x}}}$

Conclusão: $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$ é o estimador da máxima verossimilhança para λ .

Exercício 7 b)

b) Percentagem = Probabilidade $\times 100$

$$P(X < 15) = \int_0^{15} f_X(x|\lambda) dx = \int_0^{15} \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$= [-e^{-\lambda x}]_0^{15} = -e^{-15\lambda} - (-e^{-0}) = 1 - e^{-15\lambda} =$$

$\epsilon(\lambda) \rightarrow$ função estritamente crescente de λ

$\epsilon(\lambda)$ é função biunívoca de λ , logo podemos

usar a propriedade de invariância do EMV:

$$\epsilon(\hat{\lambda}) = \epsilon(\hat{\lambda}) = 1 - e^{-15\hat{\lambda}} = 1 - e^{-\frac{15}{12}} = 0.7135$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{12} \quad \text{exame} = 2 \text{ h} = 120 \text{ min}$$

Exercício 7 c)

$X \equiv \text{Tempo 1 pergunta (min.)} \sim \text{ex}(\lambda)$

$S = \sum_{i=1}^8 X_i \equiv \text{Tempo 8 perguntas (min.)} \sim G(8, \lambda)$

$X \sim G(n; \lambda) \Leftrightarrow 2\lambda X \sim \chi^2(2n) \quad Q = 2\lambda S \sim \chi^2(16)$

$$\begin{aligned} P(S \leq 120) &= P(2\lambda S \leq 2 \times \lambda \times 120) = \\ &= P(Q \leq 240\lambda) \\ &= t(\lambda) \rightarrow \text{função estritamente} \\ &\quad \text{crescente de } \lambda \text{ em } \lambda > 0 \end{aligned}$$

Assim sendo podemos usar a propriedade de invariância do EMV:

$$\begin{aligned} P(S \leq 120) &= P(Q \leq 240\lambda) = P(Q \leq 240\hat{\lambda}) = \\ &= P(Q \leq \frac{240}{12}) = P(Q \leq 20) \rightarrow \text{mão está na} \\ &= 0.78 \leftarrow \begin{array}{l} > \text{pchisq}(20, 16) > \text{round}(2) \\ [1] 0.78 \end{array} \quad \text{tabela} \end{aligned}$$

A1	A	B	C	D	E	F	G
1	0,78						
2							

Usando só as tabelas, o melhor que se podia fazer era usar o valor mais próximo de 20 na tabela da $\chi^2(16)$:

$$\begin{aligned} P(Q \leq 20) &= 1 - P(Q > 20) \approx 1 - P(Q > 19.369) = 1 - 0.25 = \\ &= 0.75 \end{aligned}$$

8. Admite-se que o tempo de reparação de certo tipo de máquinas, X , segue uma distribuição normal de parâmetros desconhecidos. A fim de estimar esses parâmetros recolheu-se uma amostra aleatória de tempos de reparação (em minutos). Os dados são os seguintes:

$$n = 10, \sum_{i=1}^{10} x_i = 846 \text{ e } \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 71607.$$

Estime a probabilidade do tempo de reparação de uma máquina ser inferior a 83 minutos.



Exercício 8

$X \equiv$ Tempo de reparação (em minutos) $\sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Amostra casual: $(x_1, \dots, x_{10})$ $n = 10$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 846$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 71607$$

$$f_x(x | \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2\right\}$$

Nota: Já determinados os EMV no exemplo anterior, denotado por exercício 2.

$$L(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right\}$$

Exercício 8

$$\begin{aligned} \ell(\mu, \sigma) &= \ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \\ &= -\frac{n}{2} [\ln(2\pi) + \ln(\sigma^2)] - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \\ &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2, \quad (\mu, \sigma^2) \in \Theta, \\ \Theta &= \{(\mu, \sigma^2): \mu \in \mathbb{R} \wedge \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}. \end{aligned}$$

Exercício 8

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \mu} l(\mu, \sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n 2(x_i - \mu)(-1) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)}{\sigma^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \sigma^2} l(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^4} = 0 \end{cases} \quad (=)$$

$$\begin{aligned} (=) \begin{cases} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0 \\ \frac{n}{2\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^4} \end{cases} & \quad (=) \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = n\mu \\ \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n} \end{cases} \quad (=) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (=) \begin{cases} \mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x} \\ \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = s^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercício 8

$$P(X < 83) = \Phi\left(\frac{83 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{83 - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) = t(\mu, \sigma^2)$$

A função $t(\mu, \sigma^2)$ é biunívoca (separadamente) em relação a μ e a σ^2 . Assim sendo, podemos usar a propriedade de invariância do EMV:

$$\widehat{t(\mu, \sigma^2)} = t(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{846}{10} = 84.6$$

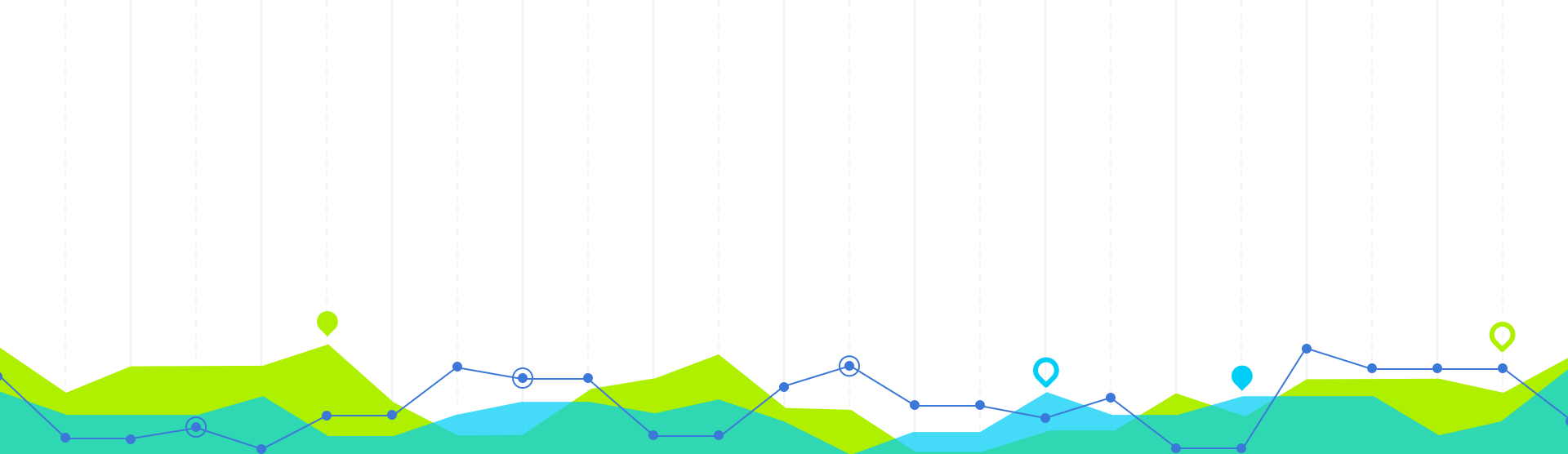
$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{71607}{10} - 84.6^2 = 3.54$$

Exercício 8

então: $\widehat{P(X < 83)} = \Phi\left(\frac{83 - \hat{\mu}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}}\right) = \Phi\left(\frac{83 - \bar{x}}{\sqrt{s^2}}\right) =$

$$= \Phi\left(\frac{83 - 84.6}{\sqrt{3.54}}\right) \approx \Phi(-0.85)$$
$$= 1 - \Phi(0.85) = 1 - 0.8023$$
$$= 0.1977$$

↑
Tabela 4



Propriedades dos Estimadores

Estimador Centrado, Consistente e Eficiente

4

Principais Propriedades dos Estimadores

Principais propriedades desejáveis nos estimadores:

- *Não enviesamento* – em termos médios, o estimador atinge o valor real do parâmetro;
- *Eficiência* – o estimador é mais eficiente quanto menor for a sua variância;
-
- *Consistência* – para n grande, o estimador deve ser aproximadamente igual ao parâmetro.

Estimador Centrado ou não Enviesado

Definição: Um estimador $\hat{\theta}$ diz-se **não enviesado** ou **centrado** do parâmetro θ se:

$$E(\hat{\theta}) = \theta.$$

Definição: Seja $\hat{\theta}$ um estimador do parâmetro θ . O **enviesamento** (*Env*) de $\hat{\theta}$ é dado por:

Viés ou Bias $\nearrow$ $Env(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta.$

[ProbabilidadesEstadística2019.pdf](#)

Estimador Eficiente

Definição: Sejam $\hat{\theta}$ e $\tilde{\theta}$ dois estimadores centrados do parâmetro θ , baseados no mesmo número de observações. Então:

- $\hat{\theta}$ diz-se **mais eficiente** do que $\tilde{\theta}$ se: $Var(\hat{\theta}) < Var(\tilde{\theta})$
- A **eficiência relativa** do primeiro estimador relativamente ao segundo é dada por:

$$\text{Eficiência relativa} = \frac{Var(\hat{\theta})}{Var(\tilde{\theta})}.$$

$\hat{\theta}$ é um estimador eficiente de θ se ele satisfizer as seguintes condições: (i) $\hat{\theta}$ é não viesado; (ii) $Var(\hat{\theta}) \leq Var(\tilde{\theta})$, onde $\tilde{\theta}$ é qualquer outro estimador não viesado de θ .

Para comparar dois estimadores enviesados utiliza-se o critério do erro quadrático médio. [Microsoft Word - PROPRIEDADES DOS ESTIMADORES.docx \(usp.br\)](#)

Definição: Seja $\hat{\theta}$ um estimador do parâmetro θ . O **erro quadrático médio** (EQM) de $\hat{\theta}$ é dado por:

$$EQM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + (Env(\hat{\theta}))^2.$$

Observação: Se $\hat{\theta}$ um estimador centrado para o parâmetro θ , então $Env(\hat{\theta}) = 0$ e, por conseguinte, $EQM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta})$.

estimador viesado jamais será eficiente, por menor que seja o viés.

Definição: Sejam $\hat{\theta}$ e $\tilde{\theta}$ dois estimadores. Diz-se que $\hat{\theta}$ é “melhor” que $\tilde{\theta}$ se:

$$EQM(\hat{\theta}) < EQM(\tilde{\theta}).$$

[Microsoft Word - PROPRIEDADES DOS ESTIMADORES.docx \(usp.br\)](#)

[ProbabilidadesEstatistica2019.pdf](#)

Erro Quadrático Médio (EQM)

3. Erro quadrático médio

Chama-se **erro quadrático médio** do estimador Θ^* a **EQM** $(\Theta^*) = E[(\Theta^* - \theta)^2]$.

Esta propriedade é um dos critérios mais usados para comparar estimadores.

É muito fácil mostrar que

$$EQM(\Theta^*) = Var[\Theta^*] + [b_{\theta}(\Theta^*)]^2$$

Se Θ^* é um **estimador centrado** de um parâmetro então o **erro quadrático médio** $\equiv$ **variância**, i.e.

$$E[(\Theta^* - \theta)^2] = Var(\Theta^*)$$

Exatidão vs Precisão

O termo **exactidão (accuracy)** refere-se à proximidade de uma medição ou estimativa ao verdadeiro valor.

O termo **precisão ou variância (precision)** refere-se ao “grau de concordância numa sucessão de medições”.



Accuracy & Precision



Accurate
but , not precise



Precise
but , not accurate



Accurate
and Precise

Eficiência Relativa vs Eficiência Absoluta

Observações:

- A eficiência exige a existência de momentos de segunda ordem dos estimadores.
- A definição de eficiência apresenta dois conceitos diferentes:
 - O primeiro estabelece uma relação entre dois estimadores centrados para θ , sendo portanto uma **eficiência relativa**.
 - O segundo é um conceito de **eficiência absoluta** na classe dos estimadores centrados para θ .
- Para obter estimadores mais eficientes recorre-se à **desigualdade de Fréchet-Cramér-Rao**.

Teorema 7.1 – Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra casual de população com função densidade (função probabilidade) $f(x|\theta)$, *satisfazendo certas condições de regularidade*, e seja $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ um estimador centrado de θ . Então,

$$\text{Var}(T) \geq \frac{1}{n\mathfrak{I}(\theta)},$$

onde,

Slides Andrade e Silva

$$\mathfrak{I}(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(X|\theta)}{\partial \theta}\right]^2\right\} = -E\left\{\left[\frac{\partial^2 \ln f(X|\theta)}{\partial \theta^2}\right]\right\} \quad (\text{quantidade de informação de Fisher})$$

Estimador Centrado de Variância Mínima

Conhecido o limite inferior dado pela desigualdade de Fréchet-Cramér-Rao, compara-se a variância do estimador centrado em análise com este limite:

- caso sejam iguais $\rightarrow$ não existe nenhum outro estimador centrado de variância inferior sendo o estimador em análise o mais eficiente;
- caso contrário $\rightarrow$ o quociente, $[n\mathfrak{I}(\theta)]^{-1} / \text{Var}(T)$, fornece uma indicação sobre a eficiência relativa do estimador T face ao hipotético estimador de variância igual ao limite inferior da desigualdade.

Estimador Convergente ou Consistente

Definição: Um estimador $\hat{\theta}$ diz-se **consistente** quando para qualquer valor positivo δ , se verifica a condição:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[|\hat{\theta} - \theta| < \delta] = 1.$$

Teorema: As condições:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(\hat{\theta}) = \theta;$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} Var(\hat{\theta}) = 0.$

são suficientes para que $\hat{\theta}$ seja estimador **consistente**.

Estimador dos Momentos vs EMV

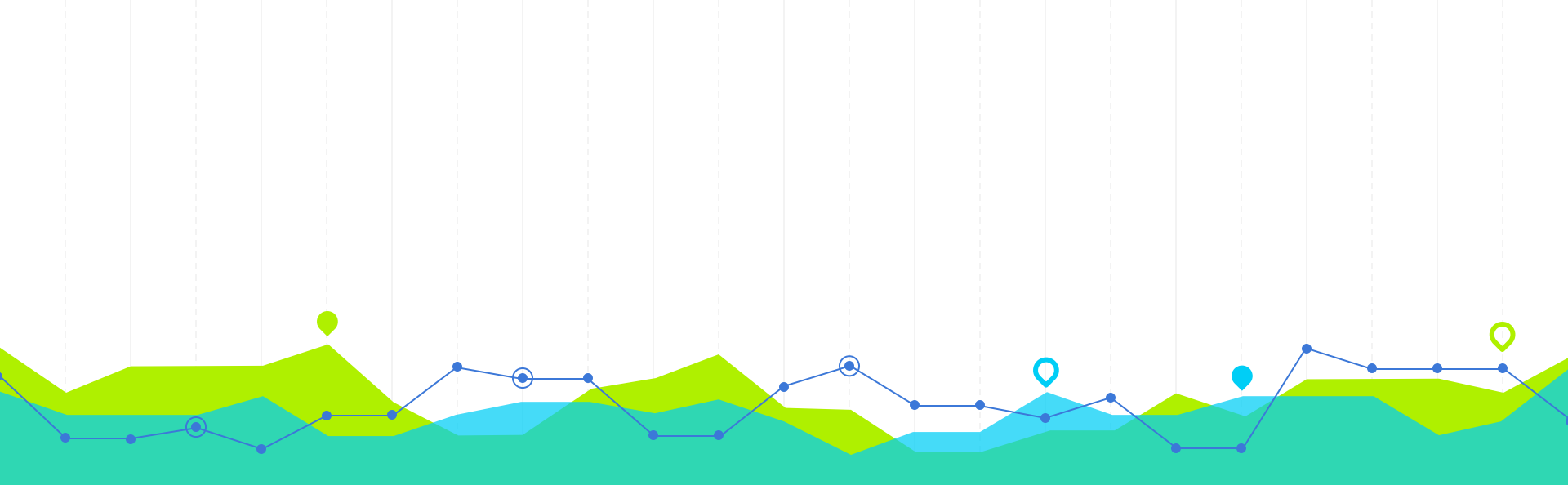
Propriedades dos estimadores obtidos pelo método dos momentos

- Em condições bastante gerais, são consistentes e possuem distribuição aproximadamente normal quando a dimensão da amostra é muito grande (distribuição assintótica).

Propriedades dos estimadores obtidos pelo método da máxima verosimilhança

- Os estimadores de máxima verosimilhança não são necessariamente centrados.
- Em condições muito gerais eles são consistentes.
- Demonstra-se que, se existir estimador mais eficiente (na óptica do teorema de Fréchet-Cramér-Rao) ele é solução única da equação $dL/d\theta = 0$ e portanto estimador de máxima verosimilhança.
- Verificadas certas condições de regularidade, os estimadores da máxima verosimilhança seguem assintoticamente uma distribuição normal. Caso haja apenas 1 parâmetro desconhecido, tem-se

$$\sqrt{n\mathfrak{I}(\theta)}(\hat{\theta} - \theta) \overset{a}{\sim} N(0,1)$$



Propriedades dos Estimadores: Exercícios

Estimador Centrado, Eficiente e Convergente

5

1. Suponha que uma variável aleatória X representa o número de avarias de um dispositivo durante um período de tempo e que obedece a uma lei de Poisson de parâmetro λ desconhecido. Para este parâmetro foram sugeridos dois estimadores:

$$\hat{\lambda} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \text{ e } \tilde{\lambda} = \frac{X_1 + X_n}{2}.$$

- a) Compare-os quanto ao enviesamento.
- b) Deduza a variância para cada um deles.
- c) Qual dos dois estimadores é mais eficiente? Justifique a sua escolha.
- d) Estude os dois estimadores quanto à consistência.



Exercício 6.4 [Estimadores, erro quadrático médio, eficiência relativa.]

Se (X_1, X_2, X_3) constitui uma amostra aleatória de dimensão 3 extraída de uma população normal com valor esperado μ e variância σ^2 , qual a eficiência de $\frac{1}{4}(X_1 + 2X_2 + X_3)$ relativamente a $\bar{X}$?



1ª) Sendo $X_1, \dots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma $U(0, \theta)$.

a) Encontre o estimador pelo método dos momentos de θ e o seu EQM.



2. Pretende-se ter uma ideia da densidade do tráfego em certo local, entre as 8 e as 9 horas. Sabe-se que o número de veículos que aí passam durante esse período segue um processo de Poisson. Fizeram-se as seguintes 9 observações casuais:

(95, 100, 80, 70, 110, 98, 97, 90, 70).

- a) Obtenha o estimador e a estimativa da máxima verosimilhança para o número médio de veículos que passam naquele local.
- b) Mostre que se trata de um estimador consistente e que é o mais eficiente.
- c) Obtenha a estimativa de máxima verosimilhança para a probabilidade de decorrerem pelo menos dois minutos sem passar qualquer veículo.
- d) Mostre que $\sum_{i=1}^n X_i$ é estatística suficiente para a média da população.



11. Admite-se que o tempo de funcionamento, em milhares de horas, de determinada componente electrónica, X , tem distribuição $G(3;1/\theta)$, ou seja, a sua função densidade é dada por

$$f(x|\theta) = \frac{x^2 e^{-x/\theta}}{2\theta^3} \quad (x > 0), \quad \theta > 0.$$

Com base numa amostra casual de dimensão n , definiram-se os seguintes estimadores para o parâmetro θ :

$$T_1 = \frac{\bar{X}}{3} \text{ e } T_2 = \frac{n\bar{X} + 1}{3n}.$$

- a) Estude o enviesamento e a consistência destes estimadores.
- b) Qual dos estimadores tem menor erro quadrático médio?
- c) Observada uma amostra casual de 10 componentes, registou-se um tempo médio de funcionamento, por componente, de 1600 horas. Calcule o estimador e a estimativa da máxima verosimilhança para θ .



14. Seja X uma variável aleatória com função densidade

$$f(x|\theta) = \frac{3\sqrt{x}}{2\theta} \exp\left\{-\frac{x^{3/2}}{\theta}\right\} \quad (x > 0), \text{ para } \theta > 0.$$

a) Mostre que

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^{3/2}}{n},$$

é o estimador da máxima verosimilhança para θ .

b) Sabendo que $X^{3/2}$ tem distribuição exponencial de média θ , estude o enviesamento e a consistência do estimador da alínea a).



24. Classifique as afirmações apresentadas abaixo de verdadeiras ou falsas, justificando sucintamente.

- a) Com base numa amostra casual de dimensão $n=3$, o estimador $T = 0.5 X_1 + 0.4 X_2 + 0.1 X_3$, sendo centrado é também o estimador mais eficiente para μ .
- b) Comparar os Erros Quadráticos Médios de dois estimadores centrados (referentes ao mesmo parâmetro) equivale a comparar as respectivas variâncias.
- c) Um estimador consistente é sempre centrado.



Obrigada!

Questões?

